Mathmind

„Niezbędna wiedza do zdania matury z matematyki”

AUTOR:

Grzegorz Pilarski

Nowa Sól 2020

Spis treści

Wstęp

Niniejsze opracowanie ma na celu przedstawienie podstawowej wiedzy, którą należy posiadać przystępując do matury. Jest ono podzielone na dwie części. W pierwszej z nich zostanie zawarta absolutnie podstawowa wiedza, którą KAŻDY abiturient mający zamiar zdać egzamin z matematyki powinien bezwzględnie posiadać. W tej drugiej pojawią się rzeczy, które znacząco pomogą przyspieszyć rozwiązanie wielu zadań.

W pierwszej części większość przypadków to zagadnienia znajdujące się w programie szkoły podstawowej, jednak jako osoba, która praktycznie codziennie pomaga młodzieży w nauce matematyki zauważyłem, że niejednokrotnie uczniowie przygotowujący się do matury o wielu rzeczach po prostu nie pamiętają. Karta wzorów to wspaniałe narzędzie, dzięki któremu napisanie matury staje się dużo prostsze. Jednak, żeby uzyskać satysfakcjonujący wynik należy umieć z niej odpowiednio korzystać. Do tego z kolei niezbędna jest znajomość podstawowych praw, zasad i schematów, które funkcjonują w matematyce. Jeśli zauważysz, że nie pamiętasz jakiegoś tematu to po prostu się go naucz do matury. ☺

W drugiej części zawarto metody, wzory i schematy, które znacząco mogą przyspieszyć rozwiązanie zadań. Co prawda jakoś specjalnie dużo tego nie ma, ale na każdej maturze w ostatnich latach stosując te schematy można było uzbierać kilka punktów.

Zasady matematyczne które bezwzględnie należy znać

1. Kolejność wykonywania działań:
   a) Nawiasy
   b) Potęgowanie / pierwiastkowanie
   c) Mnożenie / dzielenie
   d) Dodawanie / odejmowanie
      - Wynik dodawania – suma
      - Wynik odejmowania – różnica
      - Wynik mnożenia – iloczyn
      - Wynik dzielenia – iloraz

2. Zaokrąglanie liczb do dowolnej cyfry (jedności, dziesiątek, setek, tysięcy, części dziesiętnych, części setnych, części tysięcznych).
   Zasada jest prosta – jeśli za cyfrą, do której zaokrąglamy stoi 0, 1, 2, 3, 4 to zaokrąglamy w dół, jeśli z kolei stoi 5, 6, 7, 8, 9 – w górę.

3. Liczby pierwsze – liczby, które posiadają dokładnie dwa dzielniki – samą siebie i jeden, np.: 2, 3, 5, 7, 11, 13 itd. Należy pamiętać, że 0 i 1 nie są liczbami pierwszymi.
   Warto umieć rozkładać KAŻDĄ liczbę (powiedzmy mniejszą niż 1000) na czynniki pierwszy. Przydaje się to przy wyciąganiu całości z pierwiastków.

4. Ułamki:
   a) Zwykłe - liczby składające się z licznika (wartości nad kreską ułamkową) i mianownika (wartości pod kreską). Dzielą się one:
      - Właściwe – licznik jest mniejszy od mianownika, np. $\frac{2}{5}, 3\frac{4}{9}, 7\frac{40}{49}$
      - Niewłaściwe – licznik jest większy od mianownika, $\frac{20}{9}, \frac{41}{5}, \frac{84}{19}$
        Niezbędna jest umiejętność zamiany jednych na drugie i na odwrót.
   b) Dziesiętne – posiadają przecinek

5. Działania na ułamkach zwykłych
   a) Dodawanie / odejmowanie – ułamki można dodawać lub odejmować tylko wtedy, gdy mamy wspólny mianownik.
   b) Mnożenie – oba ułamki zamieniamy na ułamki niewłaściwe i „górę mnożymy z górą, a dół z dołem”.
   c) Dzielenie – zamieniamy oba ułamki na ułamki niewłaściwe, następnie dzielenie przekształcamy na mnożenie liczby odwrotnej (zamieniamy licznik z mianownikiem) dzielnika (tej przez którą dzielimy).

6. Zamiana jednostek (na niebiesko napisane jest, o ile miejsc należy przesunąć się z przecinkiem):
   a) Długości – jeśli zamieniamy mm na dm – przesuwamy się z przecinkiem o 2 miejsca w lewo.

$$mm \xrightarrow{1} cm \xrightarrow{1} dm \xrightarrow{1} m \xrightarrow{3} km$$

   b) Powierzchni – jeśli zamieniamy m^2 na cm^2 – przesuwamy się z przecinkiem o 4 miejsca w prawo.

$$mm^2 \xrightarrow{2} cm^2 \xrightarrow{2} dm^2 \xrightarrow{2} m^2 \xrightarrow{2} a \xrightarrow{2} ha \xrightarrow{2} km^2$$

   c) Objętości – jeśli zamieniamy m^3 na dm^3 – przesuwamy się z przecinkiem o 3 miejsca w prawo

$$mm^3 \xrightarrow{3} cm^3 \xrightarrow{3} dm^3 \xrightarrow{3} m^3 \xrightarrow{3} km^3$$

   W przypadku objętości warto pamiętać, że 1 litr to 1 dm^3.
   Poza tym na początku każdego zadania zamieniamy wszystko na wspólną jednostkę.

7. Procenty.
   Jest to dość obszerny temat, jednak najważniejsza jest umiejętność wyznaczania procenta z liczby, co jest niezbędne do policzenia zadań z obniżkami i podwyżkami.

8. Dzielenie przez „0" i wyciąganie pierwiastka z liczby ujemnej.
   Wyżej opisane sytuacje są dokumentnie patologiczne dla każdego matematyka operującego na liczbach rzeczywistych. Jeśli pojawia się zadanie, w którym „x" znajduje się w mianowniku należy bezwzględnie zacząć od wyznaczenia liczb, które po podstawieniu za „x" dadzą to zero w mianowniku. W ŻADNYM WYPADKU TAKA LICZBA NIE MOŻE BYĆ ROZWIĄZANIEM. W przypadku pierwiastków należy sprawdzić, kiedy wnętrze pierwiastka jest większe od zera.

9. Proste równanie kwadratowe:
   a) Jeśli rozwiązujemy równanie i dochodzimy do sytuacji x^2 równa się liczbie dodatniej to MAMY DWA ROZWIĄZANIA, przykłady:

$$x^2 = 9$$
$$x_1 = 3$$
$$x_2 = -3$$

$$x^2 = 15$$
$$x_1 = \sqrt{15}$$
$$x_2 = -\sqrt{15}$$

   b) Jeśli natomiast x^2 równa się liczbie ujemnej to NIE MA ŻADNEGO ROZWIĄZANIA.

10. Zaznaczanie przedziałów liczbowych obustronnie otwartych / zamkniętych na osi liczbowej.
    Jest to głównie wykorzystywane w przypadku nierówności kwadratowej, czyli absolutnego pewniaka na maturze.

11. Odczytywanie z wykresu dziedziny/argumentów (iksów) i zbioru wartości (igreków), miejsc zerowych, przedziałów monotoniczności (kiedy funkcja rośnie, kiedy maleje, a kiedy jest stała).
    Zwykle to też sprowadza się do przedziałów.

12. Liczenie miejsce zerowych.
    Aby wyznaczyć miejsca zerowe to $y = 0 \; lub \; f(x) = 0$
    Igrek i f(x) to jest to samo!

13. Sprawdzanie, czy dany punkt należy do wykresu funkcji.
    Pierwszą współrzędną punktu (iksową) podstawiamy do wzoru za „x”, a drugą współrzędną (igrekową) podstawiamy za y lub $f(x)$. Jeśli lewa i prawa strona są takie same to znaczy, że punkt należy, jeśli tak nie jest to nie należy.

14. Punkty przecięcia z osią OX oznacza, że za igreka we wzorze należy podstawić zero.
    Punkt przecięcia z osią OY oznacza, że za iksa we wzorze należy podstawić zero.

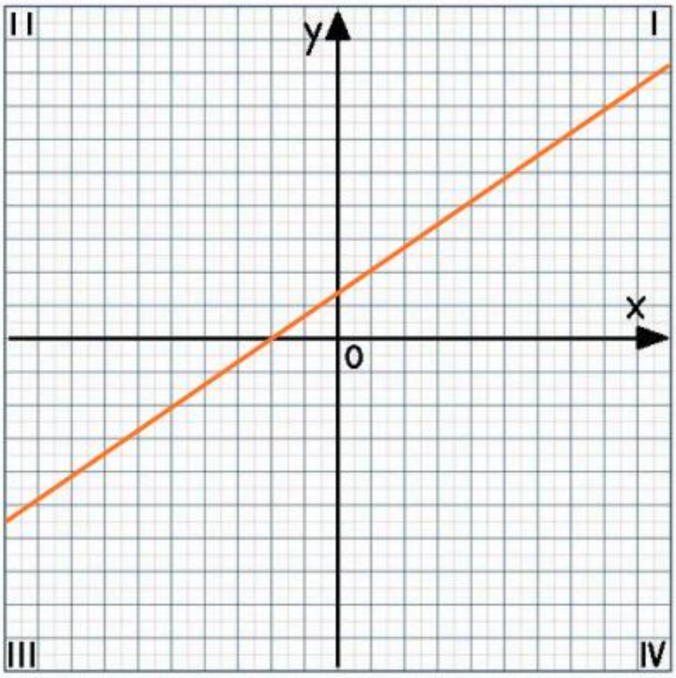
15. Przesuwanie wykresu we wszystkich kierunkach.
    Załóżmy, że funkcja $f(x)$ jest jakąś funkcją wzorcową. Przesuwanie takiego wykresu wygląda następująco:
    a) $f(x-5) - każdy\ z\ punktów\ wykresu\ należy\ przesunąć\ o\ 5\ jednostek\ w\ prawo$
    b) $f(x+7) - każdy\ z\ punktów\ wykresu\ należy\ przesunąć\ o\ 7\ jednostek\ w\ lewo$
    c) $f(x)+3 - każdy\ z\ punktów\ wykresu\ należy\ przesunąć\ o\ 3\ jednostki\ w\ górę$
    d) $f(x)-6 - każdy\ z\ punktów\ wykresu\ należy\ przesunąć\ o\ 6\ jednostek\ w\ dół$
    e) $f(x-1)-8 - każdy\ z\ punktów\ wykresu\ należy\ przesunąć\ o\ 1\ w\ prawo\ i\ 8\ w\ dół$

16. Funkcja liniowa

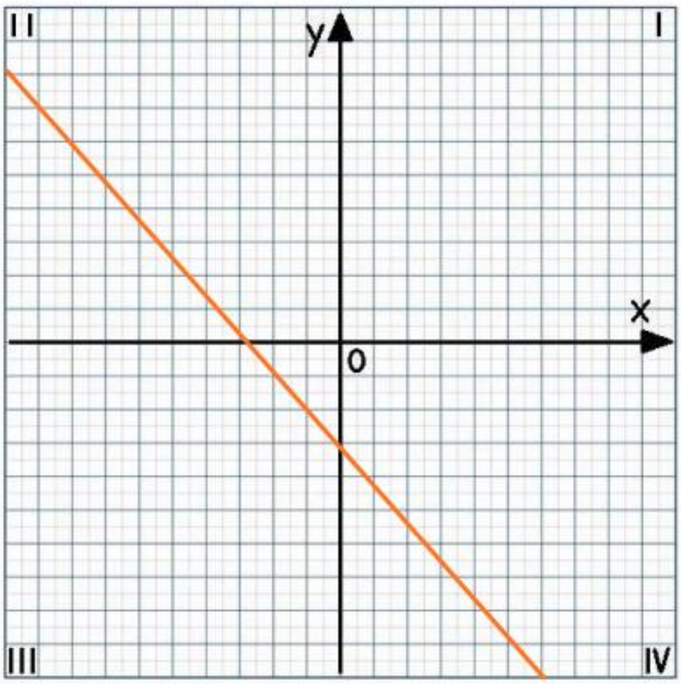
Wzór ogólny funkcji liniowej prezentuje się następująco:

$$y = ax + b$$

a) Jeśli to, co stoi bezpośrednio przy iksie (czyli „a”) jest większe od zera to funkcja jest rosnąca:



b) Jeśli to, co stoi bezpośrednio przy iksie (czyli „a”) jest mniejsze od zera to funkcja jest malejąca:



17. Równania kwadratowe.

Jedyny stosunkowo ważny wzór, który może się przydać na maturze wygląda następująco:

$$p = \frac{x_1 + x_2}{2}$$
$$p - współrzędna\ iksowa\ wierzchołka$$
$$x_1, x_2 - miejsca\ zerowe\ funkcji$$

Warto również pamiętać, że "p" jest pionową osią symetrii paraboli.

18. Równania wielomianowe.

Jeśli dane równanie ma postać „nawias razy nawias razy nawias” równa się zero to KAŻDY z tych nawiasów należy z osobna przyrównać do zera. Wtedy dopiero wyjdą nam wszystkie rozwiązania.

19. Suma miar kątów.

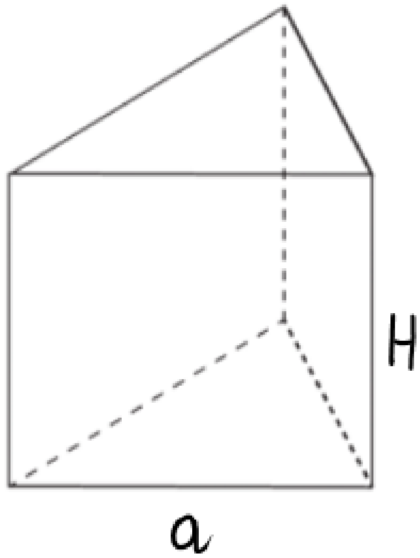
a) W przypadku wszystkich trójkątów suma miar ich kątów zawsze wynosi 180 stopni.
b) W przypadku każdego czworokąta (kwadratu, rombu, równoległoboku, prostokąta, trapezu itd.) suma miar kątów zawsze wynosi 360 stopni.

20. Graniastosłupy prawidłowe:

Wzory do wyznaczenia liczby krawędzi, wierzchołków, ścian:

$$n - liczba\ boków\ w\ podstawie$$
$$2n - liczba\ wierzchołków$$
$$3n - liczba\ krawędzi$$
$$n + 2 - liczba\ wszystkich\ ścian\ (\text{"n" ścian bocznych i dwie podstawy})$$

a) Graniastosłup prawidłowy trójkątny – w podstawie występuje trójkąt równoboczny:



Wzory na pole całkowite i objętość:

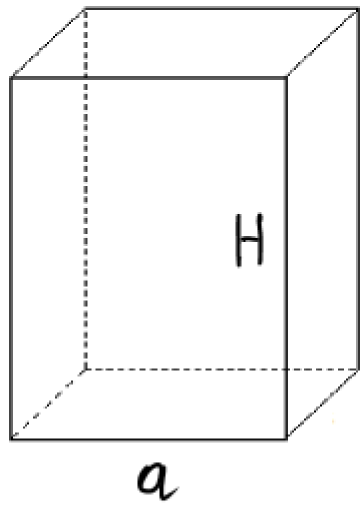
$$P_c = 2 * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 * a * H$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H$$

$$a - \textit{długość krawędzi podstawy}$$

$$H - \textit{długość wysokości}$$

b) Graniastosłup prawidłowy czworokątny – w podstawie występuje kwadrat:



Wzory na pole całkowite i objętość:

$$P_c = 2 * a^2 + 4 * a * H$$

$$V = a^2 * H$$

$$a - \text{długość krawędzi podstawy}$$

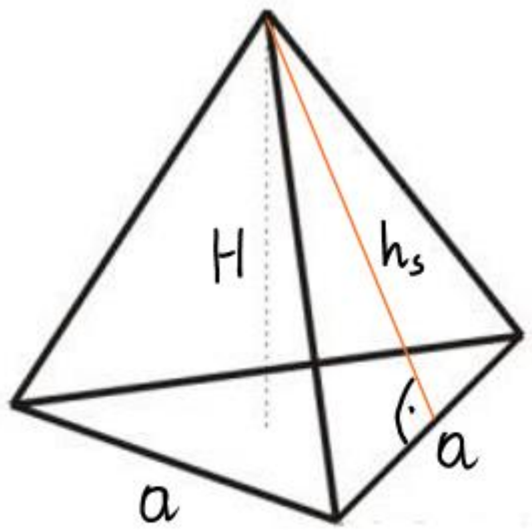
$$H - \text{długość wysokości}$$

21. Ostrosłupy prawidłowe:

Wzory do wyznaczenia liczby krawędzi, wierzchołków, ścian:

$$n - \text{liczba boków w podstawie}$$
$$n + 1 - \text{liczba wierzchołków}$$
$$2n - \text{liczba krawędzi}$$
$$n + 1 - \text{liczba wszystkich ścian ("n" ścian bocznych i jedna podstawa)}$$

a) Ostrosłup prawidłowy trójkątny – w podstawie występuje trójkąt równoboczny



Wzory na pole całkowite i objętość:

$$P_c = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{3 * a * h_s}{2}$$

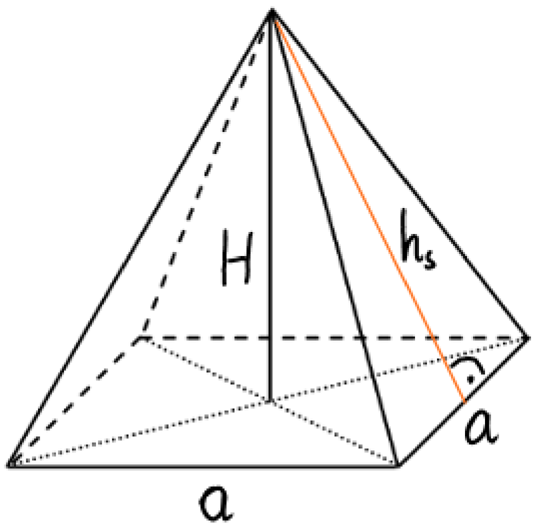
$$V = \frac{1}{3} * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H$$

a – *długość krawędzi podstawy*

h_s – *wysokość ściany bocznej*

H – *długość wysokości*

b) Ostrosłup prawidłowy czworokątny – w podstawie występuje kwadrat



Wzory na pole całkowite i objętość:

$$P_c = a^2 + \frac{4 * a * h_s}{2}$$

$$V = \frac{1}{3} * \frac{a^2\sqrt{3}}{4} * H$$

$$a - długość\ krawędzi\ podstawy$$

$$h_s - wysokość\ ściany\ bocznej$$

$$H - długość\ wysokości$$

22. Ciągi:

a) Arytmetyczny – jeśli mamy wyznaczony pierwszy wyraz, oraz różnicę to można policzyć WSZYSTKO na poziomie matury podstawowej. Kilka przykładowych wzorów, które mogą się przydać w liczeniu (chodzi mi o przedstawienie prawidłowości – indeks z lewej strony jest równy sumie indeksu z prawej i liczbie różnic):

$$a_8 = a_3 + 5r$$
$$a_4 = a_3 + r$$
$$a_{13} = a_{10} + 3r$$
$$a_{18} = a_6 + 12r$$
$$a_{33} = a_{14} + 19r$$

b) Geometryczny – jeśli mamy pierwszy wyraz i iloraz to podobnie jak w ciągu arytmetycznym policzymy wszystko. W ty przypadku również występuje pewna prawidłowość – indeks z lewej jest równy sumie indeksu z prawej i wykładnika potęgi przy „q":

$$a_4 = a_1 * q^3$$
$$a_6 = a_5 * q$$
$$a_8 = a_2 * q^6$$
$$a_{14} = a_{11} * q^3$$
$$a_{20} = a_8 * q^{12}$$

23. Dwie przecinające się proste:

Punkt przecięcia się dwóch prostych w układzie współrzędnych jest rozwiązaniem układu równań.

Przykład:

$$\begin{cases} y = 2x - 5 \\ y = -x + 1 \end{cases}$$

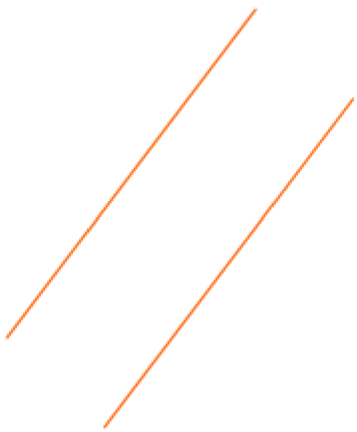
Po rozwiązaniu wychodzi:

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

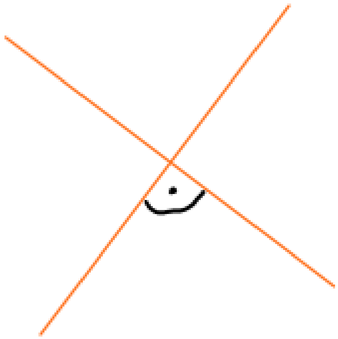
Punkt przecięcia się dwóch powyższych prostych ma współrzędne:

$$\mathrm{P} = (2; -1)$$

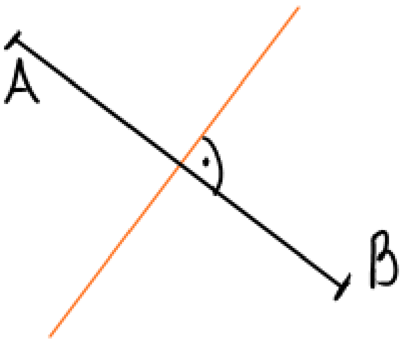
24. Proste równoległe – biegną, jak tory:



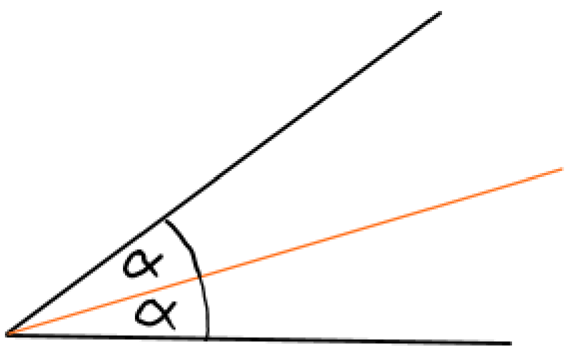
25. Proste prostopadłe – biegną pod kątem prostym:



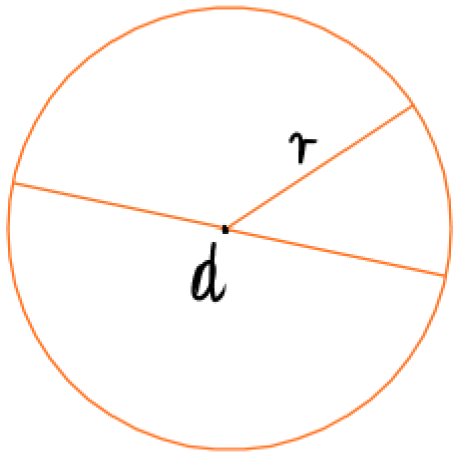
26. Symetralna odcinka – prosta, która przechodzi przez środek odcinka pod kątem prostym.



27. Dwusieczna kąta – półprosta, która dzieli kąt na dwie równe części.

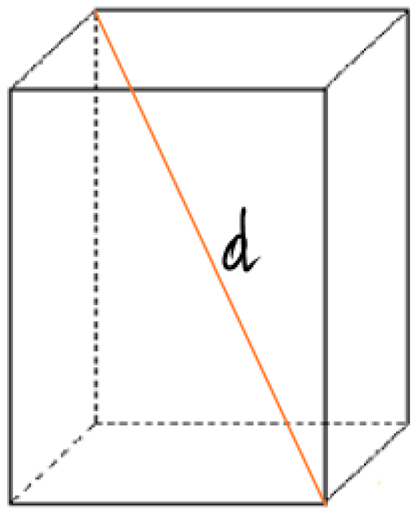


28. Koło i okrąg.
    Różnica między tymi dwoma figurami polega na tym, że koło jest zawsze pełne wnętrze (posiada pole), zaś okrąg nie posiada pola (można go sobie wyobrazić jako obręcz).



$$r - promień$$
$$d - średnica$$
$$d = 2 * r$$

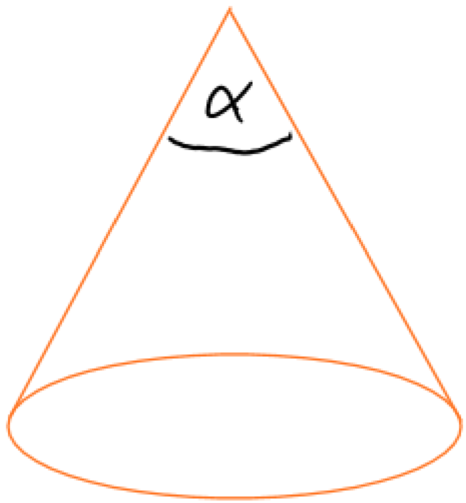
29. Przekątna graniastosłupa – odcinek łączący przeciwległe wierzchołki w graniastosłupie.



30. Przekrój osiowy walca.
    Przechodzi on przez dwie średnice podstaw. W zadaniach maturalnych jest on zawsze prostokątem (w szczególnym wypadku kwadratem, gdy średnica podstawy jest równa wysokości).

31. Przekrój osiowy stożka.
    Przechodzi on przez średnicę podstawy i wierzchołek stożka. W zadaniach maturalnych jest on zawsze trójkątem równoramiennym (w szczególnym wypadku trójkątem równobocznym, gdy tworząca jest równa średnicy podstawy).

32. Kąt rozwarcia stożka – „kąt między tworzącymi” w stożku



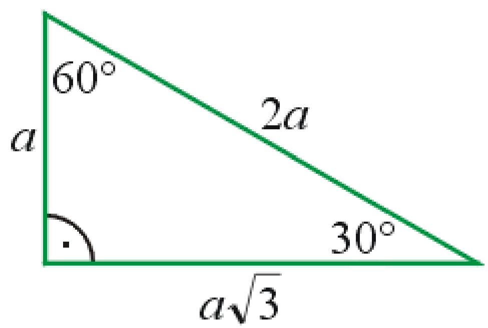
Wiedza pozwalająca znacząco przyspieszyć rozwiązywanie zadań

1. Znajomość tabliczki mnożenia, kolejnych potęg liczb do 20 (np. 12*12, 17*17), oraz względnie sprawne liczenie w pamięci w zakresie 100.
   Tak wiem – na maturze jest kalkulator, ale sama w sobie nieumiejętność tabliczki mnożenia w dorosłym życiu może okazać się w niektórych sytuacjach (np. w przyszłej pracy) kompromitująca. W tego typu działaniach kalkulator powinien być jedynie narzędziem potwierdzającym, że twoje przypuszczenia co do wyniku są prawidłowe.

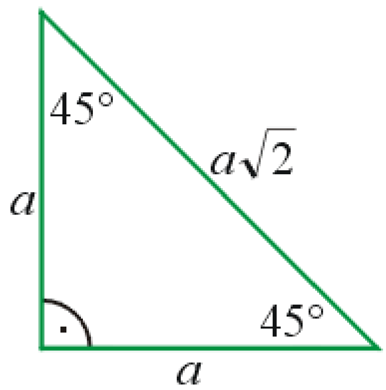
2. Zbiory liczbowe – naturalne, całkowite, wymierne, niewymierne, rzeczywiste
   Należy wiedzieć jakie liczby należą do jakiego zbioru.

3. Zapisywanie kolejnych liczb:
   Warunek, który trzeba postawić na początku każdego zapisu: $n \in C$ (n należy do liczb całkowitych).
   a) Kolejne liczby parzyste:
   $$2n;\ 2n+2;\ 2n+4;\ 2n+6 \ldots$$
   b) Kolejne liczby nieparzyste:
   $$2n+1; 2n+3;\ 2n+5;\ 2n+5 \ldots$$
   c) Kolejne liczby podzielne przez 3:
   $$3n;\ 3n+3;\ 3n+6;\ 3n+9$$
4. Cechy podzielności liczb:
   a) Przez 2 – liczba dzieli się przez 2, gdy ostatnią cyfrą w liczbie jest liczba parzysta.
   Jeśli w zadaniu mamy udowodnić, że dane wyrażenie dzieli się przez 2 to oznacza, że dwójkę należy wyciągnąć przed nawias wyrażenia.
   b) Przez 3 – liczba dzieli się przez 3, gdy suma cyfr w liczbie dzieli się przez 3. Przykład:
      - Mamy liczbę 2834 – suma cyfr tej liczby wynosi 17, zatem ta liczba nie dzieli się przez 3
      - Mamy liczbę 95361 – suma cyfr wynosi 24, zatem ta liczba dzieli się przez 3
   c) Przez 5 – liczba dzieli się przez 5, gdy na końcu znajduje się 0 lub 5
   d) Przez 6 – liczba dzieli się przez 6, gdy dzieli się jednocześnie przez 2 i 3
   e) Przez 9 – liczba dzieli się przez 9, gdy suma cyfr w liczbie dzieli się przez 9 (analogia do cechy podzielności przez 3)

5. Trójkąty ekierki:
   a) 30, 60, 90 stopni:

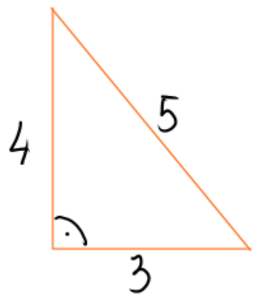


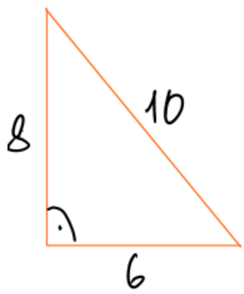
   b) 45, 45, 90 stopni:

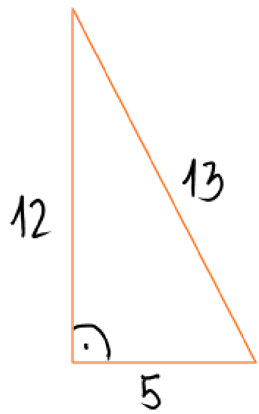


W przypadku znajomości własności wartości funkcji trygonometrycznych kątów 30, 45, 60 stopni znajomość powyższych własności nie jest konieczne.

6. Trójkąty prostokątne o całkowitych długościach boków.
   Są to trójkąty, które systematycznie pojawiają się na maturze i pamiętając o tych długościach można zaoszczędzić sporo czasu przy liczeniu boku z twierdzenia Pitagorasa.







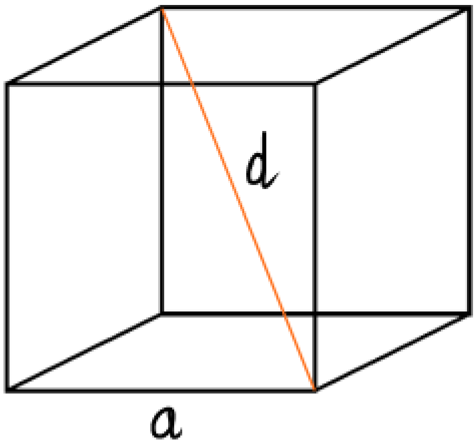
7. Wzory, których nie ma w karcie wzorów:
   a) Pole i objętość sześcianu:

$$\mathrm{P} = 6 * a^2$$
$$\mathrm{V} = a^3$$

$$a - długość\ krawędzi\ sześcianu$$

   b) Przekątna sześcianu (pomarańczowy odcinek)

$$d = a\sqrt{3}$$



c) Pole kwadratu
Standardowym wzorem jest pomnożenie przez siebie dwóch boków. Warto jednak pamiętać, że to pole można również policzyć poprzez pomnożenie przez siebie przekątnych i podzielenie przez 2 (wzór na pole rombu):

$$\mathrm{P} = \frac{e * f}{2}$$

Przekątne w kwadracie są tej samej długości, zatem $e = f$.

Podsumowanie

Pewnie niektórzy z Was się zastanawiają dlaczego nie zostały zawarte takie tematy, jak potęgi, pierwiastki, funkcje trygonometryczne, prawdopodobieństwo itp. Otóż cała reszta jeśli chodzi o wzory znajduje się w karcie wzorów. Uważam, że nie ma takiej możliwości, żeby nie zdać matury, jeśli uczeń umie WSZYSTKIE wyżej wymienione punkty przy świadomym korzystaniu z karty wzorów i posiadaniu kalkulatora. W każdym razie, jeśli dotarłeś do tego momentu, a w dalszym ciągu uznajesz, że w kilku z punktów możesz poszerzyć kompetencje to gorąco Cię do tego zachęcam.